www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1989

OPTION M' **OPTION P'**

L'énoncé P' est extrait de l'énoncé M' sauf des détails de forme.

L'indication M' en marge signifie que la question ne figure que dans l'énoncé M'.

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{R}$. On note $<x|y>$ le produit scalaire de tout couple $(x,y) \in E^2$ et $\|x\|$ la norme associée. Pour tout a appartenant à l'algèbre $\mathfrak{L}$ des endomorphismes de E, on désigne respectivement par Ima, Ker$a$ et tr(a) l'image, le noyau et la trace de a, et par a^* l'adjoint de a pour la structure euclidienne de E. Si $b \in \mathfrak{L}$, ab est l'endomorphisme composé $a \circ b$; de même, $a^2 = a \circ a$; enfin I est l'automorphisme identique de E.

♦

I

1. a. Montrer que l'application $(a,b) \mapsto \text{tr}(a^*b)$ définit sur $\mathfrak{L}$ un produit scalaire. On pourra le noter $(a|b)$ et on désignera par $|a| = \sqrt{\text{tr}(a^*a)}$ la norme associée.

b. Comparer $|a|$ à $|a^*|$.

c. Montrer que $|ab| \leqslant |a|.|b|$ pour tout couple $(a,b) \in \mathfrak{L}^2$.

M' → **d.** Caractériser les couples (a,b) pour lesquels $|ab| = |a|.|b|$.

2. On rappelle, sans en demander aucune démonstration, qu'on définit aussi sur $\mathfrak{L}$ une norme notée $|||a|||$ pour tout $a \in \mathfrak{L}$ en posant $|||a||| = \sup_{x \in S} \|a(x)\|$ où $S = \{x \in E ; \|x\| = 1\}$.

a. Exprimer $|a|$ et $|||a|||$ à l'aide des valeurs propres de a^*a.

b. Montrer que $|||a||| \leqslant |a|$ et trouver le plus grand réel K tel que $K|a| \leqslant |||a|||$ pour tout $a \in \mathfrak{L}$.

M' → **c.** Lorsque a décrit $\mathfrak{L}$ privé de 0, le quotient $|||a|||/|a|$ prend-il toutes les valeurs du segment $[K,1]$?

3. a. Comparer $|||a|||$ à $|||a^*|||$.

b. Comparer $|ab|$ à $|||a|||.|b|$ et à $|a|.|||b|||$ pour tout couple $(a,b) \in \mathfrak{L}^2$.

♦

.../...

II

4. Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, on appelle projecteur orthogonal associé à E_1 l'endomorphisme de E qui applique tout élément de E sur sa projection sur E_1 parallèlement au sous-espace supplémentaire orthogonal de E_1. L'ensemble des projecteurs orthogonaux de E est noté $\mathcal{S}$.

a. Caractériser par des relations entre f, f^* et f^2 l'appartenance de f à $\mathcal{S}$.

b. Quel est l'ensemble des valeurs prises par $|f|$ lorsque f décrit $\mathcal{S}$?

5. Soient f et g deux projecteurs orthogonaux de rang 1 et dont les images font entre elles un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer $|f-g|$.

6. On considère dans cette question un couple $(f,g) \in \mathcal{S}^2$ tel que $|f-g| < 1$.

a. Comparer $|f-g|.\|f(x)\|$ à $\|f(x)\|$ pour $x \in \mathrm{Ker} gf$ et en déduire que la somme des deux sous-espaces $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}g$ est directe.

b. Montrer que f et g ont le même rang et que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}g$ sont supplémentaires, ainsi que $\mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Ker}f$.

c. Si de plus $n = 3$, avec $f \neq 0$ et $f \neq I$, quelle est, pour $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Im}g$, la signification géométrique de l'inégalité $|f-g| < 1$?

7. On considère dans cette question deux projecteurs orthogonaux f et g de même rang.

a. Vérifient-ils nécessairement l'inégalité $|f-g| < 1$? Justifier la réponse.

b. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal $u \in \mathfrak{L}$ tel que $g = ufu^{-1}$.

c. Quelle est l'action de $a = uf$ sur $\mathrm{Ker}f$ et sur $\mathrm{Im}f$, et celle de a^* sur $\mathrm{Ker}g$ et sur $\mathrm{Im}g$?

d. Exprimer f et g en fonction de a et a^*.

8. On considère dans cette question un couple $(f,g) \in \mathcal{S}^2$ tel que $\mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}g = E$ et on pose $s = I - f + fgf$.

a. Montrer que les valeurs propres de s appartiennent à l'intervalle $]0,1]$.

b. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique, inversible et à valeurs propres positives, noté t, tel que $t^2 = s$.

M' →

c. Etudier l'unicité de t dans les conditions de II.8.b.

d. Montrer que la restriction de t^{-1} à $\mathrm{Ker}f$ est l'application identique et que $\mathrm{Im}f$ est stable par t^{-1}. En déduire que t^{-1} et f commutent.

e. On pose $b = gt^{-1}f$. Calculer b^*b en fonction de f. Comparer les propriétés de b à celles de a étudiées en II.7.c et calculer bb^* en fonction de g.

♦

.../...

III

9. Soient f et g deux projecteurs orthogonaux de E, de rangs respectifs p et q.

a. Montrer que les valeurs propres de fg appartiennent au segment $[0,1]$.

M' **b.** Existe-t-il pour tout $\lambda \in [0,1]$ un couple $(f,g) \in \mathcal{P}^2$ tel que λ soit valeur propre de fg ?

c. Exprimer $|f-g|^2$ en fonction de p, q et $\mathrm{tr}(fg)$.

d. Dans le cas où f et g commutent, quelle est la nature géométrique de fg ? Expliciter son image et son noyau à l'aide de $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Im}g$. Quelles sont ses valeurs propres ? Calculer $|f-g|^2$ en fonction de p, de q et de la dimension m de $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g$.

10. Soit $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E de rang p.

a. Montrer que $\mathcal{P}_p$ est une partie compacte de $\mathcal{L}$ pour toute norme définie sur $\mathcal{L}$.

[ ]: P' seul **b.** On fixe $g \in \mathcal{P}$, de rang q, et f décrit $\mathcal{P}_p$; on pose $\delta(f) = |f-g|$. Exprimer en fonction de p et de q, [et en distinguant deux cas,] le minimum de δ sur $\mathcal{P}_p$ en précisant, parmi les projecteurs $f \in \mathcal{P}_p$ commutant avec g, ceux pour lesquels $\delta(f)$ est égal à ce minimum. On caractérisera géométriquement les projecteurs f obtenus à l'aide de $\mathrm{Im}f$, $\mathrm{Im}g$, $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Ker}g$.

c. Exprimer de même en fonction de p, q et m (défini en 9.c) le maximum de δ sur $\mathcal{P}_p$ en précisant géométriquement, parmi les projecteurs $f \in \mathcal{P}_p$ commutant avec g, ceux pour lesquels $\delta(f)$ est égal à ce maximum.

11. Lorsque $0 < q < n$, on choisit une base orthonormale de E dans laquelle la matrice G de $g \in \mathcal{P}_q$ et la matrice F de $f \in \mathcal{P}_p$ s'écrivent respectivement

$$G = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où I_q est la matrice unité d'ordre q, A et D deux matrices carrées d'ordres respectifs q et $n-q$, B et C deux matrices rectangulaires, et où les trois notations 0 désignent, dans l'écriture de G, une matrice carrée et deux matrices rectangulaires toutes trois nulles.

a. Caractériser par des relations entre A, B, C, D et leurs adjointes le fait que f est un projecteur orthogonal.

b. Ecrire une condition relative à B, nécessaire et suffisante pour que fg n'ait pas de valeurs propres différentes de 0 et de 1. Comparer dans ce cas fg à gf.

c. Existe-t-il des projecteurs $f \in \mathcal{P}_p$ ne commutant pas avec g et pour lesquels $\delta(f)$ est extrémal sur $\mathcal{P}_p$?

M' **12.** On considère deux projecteurs $f \in \mathcal{P}_p$ et $g \in \mathcal{P}_q$ et, lorsque $0 < q < n$, une base orthonormale de E définie comme dans la question 11.

a. Caractériser les vecteurs propres de fg à l'aide, notamment, des vecteurs propres de A et du noyau de g.

b. L'endomorphisme fg est-il diagonalisable ?

♦ ♦
♦

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail